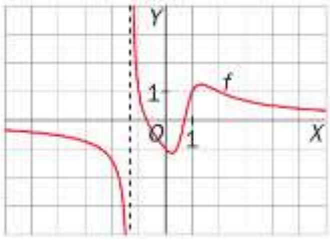
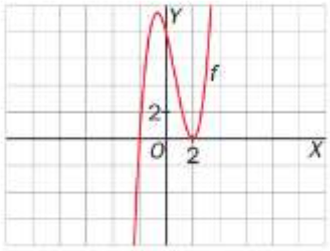
2. Límite de una función en el infinito

Cuando estudiamos el comportamiento de una función cuando x tiende a $\pm\infty$ nos podemos encontrar con tres situaciones:

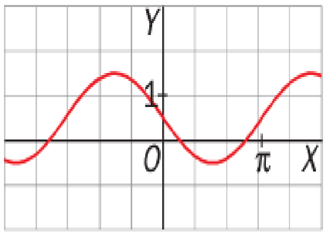
a) que el valor de la función se aproxime cada vez más a un cierto número *L*. En ese caso podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$



b) que la función crezca o decrezca indefinidamente. En ese caso podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$



c) que la función sea periódica o no siga ningún patrón reconocible. En ese caso diremos que no existe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.



Definamos los conceptos anteriores de manera más rigurosa:

- El límite de una función f(x), cuando x tiende a $+\infty$, es un número real L, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número x_0, tal que si $x > x_0$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$
- El límite de una función f(x), cuando x tiende a $-\infty$, es un número real L, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número x_0, tal que si $x < x_0$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$
- El $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M < 0$ existe un $N > 0$ tal que f(x) < M siempre que x > N
- El $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa que para todo $M > 0$ existe un $N > 0$ tal que f(x) > M siempre que x > N
- El $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M < 0$ existe un $N < 0$ tal que f(x) < M siempre que x < N
- El $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ significa que para todo $M > 0$ existe un $N < 0$ tal que f(x) > M siempre que x < N

2.1. Comparación de infinitos.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ es un **infinito de orden superior** que $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ si:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, o bien $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=0$

En general: $\lim_{x\to+\infty} \log_a x < \lim_{x\to+\infty} x^n < \lim_{x\to+\infty} a^x \quad (a>1)$

2.2. Operaciones con expresiones cero o infinitas.

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$k+\infty=+\infty$ $+\infty+\infty=+\infty$ $k-\infty=-\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$ $[+\infty-\infty]$ indeterminado	$+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$ $+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ $-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$ $-\infty\cdot(-\infty)=+\infty$ Si $k\in\Re^+$: $+\infty\cdot(+k)=+\infty$ $+\infty\cdot(-k)=-\infty$ $-\infty\cdot(+k)=-\infty$ $-\infty\cdot(-k)=+\infty$ $[\pm\infty\cdot 0]$ indeterminado	$\frac{0}{k}=0\ ;\ k\neq 0$ $\frac{k}{0}=\pm\infty\ ;\ k\neq 0$ $\frac{k}{\pm\infty}=0$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ indeterminado $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ indeterminado	$(+\infty)^k=\infty$ si k > 0 $(+\infty)^k=0$ si k < 0 $\left.\begin{array}{l}k^{+\infty}=\infty\\k^{-\infty}=0\end{array}\right\}$ si k > 1 $\left.\begin{array}{l}k^{+\infty}=0\\k^{-\infty}=\infty\end{array}\right\}$ si k < 1 $[\infty^0]$ indeterminado $[0^0]$ indeterminado $[1^\infty]$ indeterminado